Existence of Non-Contractible Periodic Orbits in Hamiltonian Systems(Dynamical Systems and Differential Geometry)

AUTHOR(S):

薮, 義郎

CITATION:

薮, 義郎. Existence of Non-Contractible Periodic Orbits in Hamiltonian Systems(Dynamical Systems and Differential Geometry). 数理解析研究所講究録 2008, 1576: 105-119

ISSUE DATE:
2008-01

URL:
http://hdl.handle.net/2433/81347

数理解析研究所講究録
第 1576 巻 2008 年 105-119

Existence of Non-Contractible Periodic Orbits in Hamiltonian Systems *

薮 義郎†
京都大学大学院 情報学研究科

1 Introduction

(M,ω) を閉シンプレクティック多様体とし、$H \in C^\infty(S^1 \times M)$ を (時間に依存した) ハミルトン関数とする。S^1 は $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を表わすとし、従って H は $H(t+1,x) = H(t,x)$ を任意の $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$ に対して満たすとする。このとき、(時間に依存した) ハミルトンベクトル場 X_t が

$$\omega(X_t,\bullet) = dH_t$$

により定まる。ここで、$H_t = H(t,\bullet)$ である。ハミルトン関数 H に随伴したハミルトン方程式は

$$\frac{dx}{dt} = X_t(x) \tag{1.1}$$

として定義される。いま、(1.1) の周期 1 の周期解 (1-周期解) 全体のなす集合を $\mathrm{Per}(H)$ と書くことにする。また、その 1-周期解の中で、ホモトピー型が $\alpha \in \pi_1(M)$ であるもの全体を $\mathrm{Per}(H;\alpha)$ と書く。

ここで考える問題は、1-周期解の存在問題である。すなわち、$\mathrm{Per}(H) = \emptyset$ であるか否かである。これに対して、アーノルドは次のような予想を提起した [Ar65]：

Conjecture 1.1. *generic* な $H \in C^\infty(S^1 \times M)$ に対して、

$$\#\mathrm{Per}(H;0) \geq \sum_k b_k(M)$$

が成り立つ。$0 \in \pi_1(M)$ は可縮なループのホモトピー型を、$b_k(M)$ は M の k 次の *Betti* 数を表わす。

この予想は、M が曲面の場合は Eliashberg[El79] によって、$M = T^{2n}$ の場合は Conley-Zehnder[CZ83] により肯定的に解決された。その後、アーノルド予想が系統的に解決されるのはフレアーによってである。フレアー [Fl89-2] はシンプレクティック多様体 (M,ω) が単調 (monotone) であるという条件下で、現在フレアーホモロジーと呼ばれるホモロジーを構成することにより、アーノルド予想を解決した。その後、Hofer-Salamon[HS95]、お

*数理解析研究所研究集会「力学系と微分幾何学」２００７年９月１２日～１４日
†yoshiro@amp.i.kyoto-u.ac.jp

よび、Ono[On95] により、フレアーが課した単調性の条件を緩め、(M,ω) が半正 (semi-positive or weakly monotone) の場合に予想を解決した。一般のコンパクトなシンプレクティック多様体の場合は、Liu-Tian[LT98]、および、Fukaya-Ono[FO99] により証明されている。

フレアーホモロジーを用いた、アーノルド予想の証明の方針は以下のようなものである。(M,ω) に対して、ω と両立するような概複素構造 J を選び固定する。ここで、概複素構造 $J:TM\to TM$ が ω と両立する (ω-compatible) とは、$\omega(JX,JY)=\omega(X,Y)$ であり、$g_J=\omega(\bullet,J\bullet)$ がリーマン計量となっていることを指す。すると、$\mathrm{Per}(H;0)$ の各元を生成元とする自由加群

$$\mathrm{CF}^*(H,J;0)=\bigoplus_{\gamma\in\mathrm{Per}(H;0)}\Lambda_{\omega,0}\langle\gamma\rangle$$

上にハミルトン関数 H と概複素構造 J を使って、余境界作用素 δ^* : $\mathrm{CF}^*(H,J;0)\to\mathrm{CF}^*(H,J;0)$ がしかるべく定義される。$\Lambda_{\omega,0}$ はローラン級数環を一般化した環で、Novikov 環と呼ばれる。([HS95] または後述を見よ。) このようにして定義される鎖複体 $(\mathrm{CF}^*(H,J;0),\delta^*)$ を (可縮な) 周期軌道に対するフレアー鎖複体と呼ぶ。また、フレアー鎖複体から決まるホモロジーをフレアーコホモロジーと呼び、$\mathrm{HF}^*(H,J;0)$ と書くことにする。(ホモロジーも考えることも出来るが、ここではコホモロジーを考える。)

このとき、フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*(H,J;0)$ はハミルトン関数 H や概複素構造 J に依らずすべて同型であることが証明できる。いま、H を時間に依存しない M 上のモース関数で、C^2-位相の意味で十分小さいものとしてみよう。このような H に対しては、$\mathrm{Per}(H;0)$ は不動点のみからなる、つまり、$\mathrm{Per}(H;0)$ はモース関数 H の臨界点のなす集合に等しい。さらに、フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*(H,J;0)$ の計算はモース関数 H に対するモース・スメール・ウィッテンコホモロジーの計算に帰着され、この場合 $\mathrm{HF}^*(H,J;0)$ は $H^*(M)\otimes\Lambda_{\omega,0}$ に同型であることが示される。

以上の議論から、$\mathrm{CF}^*(H,J;0)$ は $\mathrm{Per}(H;0)$ を生成元とする自由加群であり、そのホモロジー $\mathrm{HF}^*(H,J;0)$ は $H^*(M)\otimes\Lambda_{\omega,0}$ に同型であることが分かった。したがって、モースの不等式より、

$$\mathrm{Per}(H;0)\geq\sum_k b_k(M)$$

が直ちに導かれる。

これがフレアーコホモロジーを使ったアーノルド予想の証明の概略である。ただし、この方法は考えている周期軌道が可縮である場合にしか適用できない。実際、$\alpha\in\pi_1(M)$ が自明でないとして上の方法を適用してみよう。このとき、ホモトピー型が α であるような周期軌道を生成元とする自由加群

$$\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)=\bigoplus_{\gamma\in\mathrm{Per}(H;\alpha)}\Lambda_{\omega,\alpha}\langle\gamma\rangle$$

とその上の余境界作用 $\delta^*:\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)\to\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ が同様に定義される。しかも可縮な周期軌道の場合と同様に、$\mathrm{HF}^*(H,J;\alpha)$ はハミルトン関数 H や概複素構造 J に依らずすべて同型であるということまで証明できる。

したがって、あとは $H\in C^\infty(S^1\times M)$ が C^1-位相の意味で十分小さいときに、フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*(H,J;\alpha)$ を計算すればよい。H が C^1-位相の意味で十分小さいと

きに、$\mathrm{HF}^*(H,J;\alpha)=0$ であることがすぐに分かる。なぜなら、$H\in C^\infty(S^1\times M)$ が C^1-位相で十分小さければ、$\mathrm{Per}(H;\alpha)=\emptyset$ であるからである。実際、$\gamma\in\mathrm{Per}(H;\alpha)$ であると仮定して矛盾を導く。この周期軌道の長さをリーマン計量 g_J で計ると、

$$\mathrm{length}(\gamma)=\int_0^1\|\dot\gamma\|dt=\int_0^1\|\mathrm{grad}H\circ\gamma\|dt$$

となる。したがって、H は C^1-位相で十分小さいから周期軌道 γ の長さも十分小さいことになるが、これは矛盾である。$\alpha\in\pi_1(M)$ は自明ではないから、$\alpha\neq 0$ をホモトピー型としてもつ閉曲線の長さは最小値を持ち、$\mathrm{length}(\gamma)$ は H に依らない定数で下から抑えられるからである。

$\mathrm{HF}^*(H,J;\alpha)$ がハミルトン関数 H や概複素構造 J に依存しないことから、$\alpha\neq 0$ ならば常に $\mathrm{HF}^*(H,J;\alpha)=0$ であることが分かる。したがって、フレアーコホモロジーからは $\#\mathrm{Per}(H;\alpha)\geq 0$ という自明な結論しかえられない。このように、フレアーコホモロジーを用いて、ハミルトン系の可縮でない周期軌道の存在を示そうとするアプローチは破綻する。

以下、この論説では可縮でない周期軌道の存在を調べるためのアプローチとして、2 つの道具を紹介し、その基本的な性質を述べる。1 つは filtered フレアーコホモロジーであり、もう一つは Whitehead トーションである。

2 周期軌道に対するフレアーコホモロジー

(M,ω) を閉シンプレクティック多様体であるとする。ω と両立する概複素構造 J のなす集合は可縮であって、特に空集合ではない。したがって、TM の第一チャーン類 $c_1\in H^2(M;\mathbb{Z})$ が一意に定まる。

さて、フレアーコホモロジーを構成するにあたり、以下のものを固定しておく：

- ホモトピー型 $\alpha\in\pi_1(M)$。$\alpha\neq 0$ であると仮定する。
- ホモトピー型が α である参照ループ $\gamma_{\mathrm{ref}}:S^1\to M$。

また、自由ループ空間の連結成分で、ホモトピー型が α であるものからなるものを $\mathcal{L}_\alpha M$ と書く。つまり、

$$\mathcal{L}_\alpha M=\{\gamma:S^1\to M\mid[\gamma]=\alpha\in\pi_1(M)\}$$

である。

ループ空間 $\mathcal{L}_\alpha M$ の被覆空間 $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ を以下のように定義しよう。

$$\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M=\left\{(\gamma,u)\;\middle|\;\begin{array}{l}\gamma\in\mathcal{L}_\alpha M,\ u:[0,1]\times S^1\to M\\ u(0,t)=\gamma_{\mathrm{ref}}(t),\ u(1,t)=\gamma(t)\end{array}\right\}\Big/\sim.$$

ここで、上式における同値関係は

$$(\gamma_1,u_1)\sim(\gamma_2,u_2)\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}\gamma_1=\gamma_2,\\ \omega(u_1\#(-u_2))=0,\ c_1(u_1\#(-u_2))=0,\end{cases}$$

によって与えられる。ここで、$u_1\#(-u_2)$ は u_1 と u_2 を境界 γ_{ref} と $\gamma_1=\gamma_2$ に沿って張り合わせて得られる T^2 から M への写像を表わす。上のようにして定義される空間 $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ は $\mathcal{L}_\alpha M$ の被覆空間であり、被覆変換群は

$$\Gamma_{\omega,\alpha}=\frac{\mathrm{Im}(\pi_1(\mathcal{L}_\alpha M)\to H_2(M))}{\ker(\pi_1(\mathcal{L}_\alpha M)\to\mathbb{R};\,A\mapsto\omega(A))\cap\ker(\pi_1(\mathcal{L}_\alpha M)\to\mathbb{Z};\,A\mapsto c_1(A))}$$

である。ただし、$\mathcal{L}_\alpha M$ 上の閉曲線は T^2 から M への滑らかな写像と同一視できるから、この同一視により $\pi_1(\mathcal{L}_\alpha M)$ から $H_2(M)$ への写像が誘導されることに注意する。特に、$\Gamma_{\omega,\alpha}$ は可換群である。

空間 $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ 上の作用汎関数 $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ を

$$\mathcal{A}_{H,\alpha}([\gamma,u])=-\int_{[0,1]\times S^1}u^*\omega-\int_0^1 H(t,\gamma(t))dt,\quad [\gamma,u]\in\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M,$$

によって定義する。この作用汎関数は古典力学で現れる作用汎関数を一般化したものである。もし ω が完全形式 $\omega=-d\theta$ であったとすると、ストークスの定理から $\mathcal{A}_{H,\alpha}([\gamma,u])=\int_{S^1}\gamma^*\theta-\int_0^1 H(t,\gamma(t))-\int_{S^1}\gamma_{\mathrm{ref}}^*\theta$ となる。すなわち、定数 $\int_{S^1}\gamma_{\mathrm{ref}}^*\theta$ を除けば、$\mathcal{A}_{H,\alpha}$ は古典力学で現れる作用汎関数に一致する。このような事情から、次の命題が成り立つことは容易に想像されるであろう。

Lemma 2.1 (Variational Principle). $[\gamma,u]\in\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ が作用汎関数 $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ の臨界点であるための必要十分条件は、γ がハミルトン方程式 $\dot{\gamma}=X_t(\gamma)$ を満たすことである。

作用汎関数 $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ に対する第一変分公式が

$$(d\mathcal{A}_{H,\alpha})_{[\gamma,u]}(X)=\int_0^1\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}-X_t(\gamma),X)dt,\quad X\in T_{[\gamma,u]}\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M\cong\Gamma(\gamma^*TM),$$

となることから、上の補題は証明される。

Definition 2.2 (Spectrum). 作用汎関数の臨界点全体のなす集合を $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})$ と記す。また、作用汎関数 $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ の臨界値全体のなす集合をスペクトル集合といい、$\mathrm{Spec}(H;\alpha)$ と書く；

$$\mathrm{Spec}(H;\alpha)=\{\mathcal{A}_{H,\alpha}([\gamma,u])\mid[\gamma,u]\in\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})\}.$$

スペクトル集合の性質を述べるには若干の準備が要る。(M,ω) 上のシンプレクティック微分同相写像群 $\mathrm{Symp}(M,\omega)=\{\phi\in\mathrm{Diff}(M)\mid\phi^*\omega=\omega\}$ は幾何学的には自然な対象であるが、$\mathrm{Symp}(M,\omega)$ はさらに興味深い部分群を含んでいる。それがハミルトン微分同相群 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ である。$\phi\in\mathrm{Symp}(M,\omega)$ がハミルトン微分同相写像であるとは、あるハミルトン関数 $H\in C^\infty(S^1\times M)$ が存在して、H のハミルトンベクトル場の生成するフロー ϕ_t を用いて $\phi_1=\phi$ となるときをいう。このとき、$H\mapsto\phi$ と記すと約束する。ハミルトン微分同相写像全体の集合 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ は写像の合成に関して群をなし [Po01]、$\mathrm{Symp}(M,\omega)$ の部分群である。

Proposition 2.3. $\phi\in\mathrm{Ham}(M,\omega)$ とする。ϕ を生成するハミルトン関数のなす集合

$$\mathcal{H}_\phi=\{H\in C^\infty(S^1\times M)\mid H\mapsto\phi\}$$

上に同値関係を次のように定義する：$H^0 \sim H^1$ であるのは、H^0 と H^1 を結ぶ $\mathcal{H}_\phi$ 内の道 $\{H^s\}_{s\in[0,1]}$ が存在することである。この同値関係による同値類を $[\phi, H] \in \mathcal{H}_\phi/\sim$ のように書く。

このとき、$\mathcal{H}_\phi/\sim$ は $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ の普遍被覆空間 $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ と同一視できる。

これでスペクトル集合 $\mathrm{Spec}(H;\alpha)$ の性質を述べることが出来る。スペクトル集合 $\mathrm{Spec}(H;\alpha)$ は $H \in \mathcal{H}_\phi$ に依存しているのではなく、普遍被覆空間の元 $[\phi, H] \in \mathcal{H}_\phi/\sim= \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ に本質的に依存しているのである。

Theorem 2.4. $H^0, H^1 \in \mathcal{H}_\phi$ が $\int_M H_0\omega^n = \int_M H_1\omega^n = 0$ を満たし、かつ、上の同値関係の意味で $H^0 \sim H^1$ であるとする。このとき、スペクトル集合 $\mathrm{Spec}(H^0;\alpha)$ は $\mathrm{Spec}(H^1;\alpha)$ に等しい。

Skecth of Proof. $H^0 \sim H^1$ であるから、H^0 と H^1 とを結ぶ 1 パラメータ族 $\{H^s\}_{s\in[0,1]} \subset \mathcal{H}_\phi$ が存在する。H^s のハミルトンベクトル場 X_t^s のフローを ϕ_t^s と書く。各 $s \in [0,1]$ に対して、$H^s \in \mathcal{H}_\phi$ であるから、$\phi_1^s = \phi$ である。また、ハミルトンベクトル場 X_t^s の 1-周期軌道 γ に対して、$\gamma(0)$ は $\phi_1^s = \phi$ の不動点であるから、

$$\mathrm{Per}(H^s;\alpha) \cong \mathrm{Per}(H^0;\alpha), \quad \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^s,\alpha}) \cong \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^0,\alpha}), \quad s \in [0,1]$$

である。この $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^0,\alpha})$ から $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^s,\alpha})$ への対応は次のようにして構成できる。

いま、$\psi_t^s = \phi_t^s \circ (\phi_t^0)^{-1}$ とおくと、ψ_t^s は

$$F^s(t,x) = H^s(t,x) - H^0(t, \phi_t^s(x)), \quad (t,x) \in S^1 \times M,$$

のハミルトンベクトル場から生成されるフローであることが分かる。すると、

$$\mathrm{Per}(H^0;\alpha) \longrightarrow \mathrm{Per}(H^s;\alpha)\,;\, \gamma \longmapsto (\psi^s\gamma : t \mapsto \psi_t^s(\gamma(t)))$$

は全単射写像となる事が示せる。さらに、

$$\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^0,\alpha}) \longrightarrow \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^s,\alpha})\,;\, [\gamma, u] \longmapsto [\psi^s\gamma, \psi^s u]$$

という全単射写像も得られる。ここで、$(\psi^s u)(s',t) = \psi_t^{ss'}(u(s',t)), (s',t) \in [0,1] \times S^1$ である。

$\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^0,\alpha})$ から $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^s,\alpha})$ への全単射写像が得られたから、$[\gamma, u] \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^0,\alpha})$ に対して、$\mathcal{A}_{H^s,\alpha}([\psi^s\gamma, \psi^s u])$ が $s \in [0,1]$ に依らず一定であることを示せばよい。実際、$d\mathcal{A}_{H^s,\alpha}([\psi^s\gamma, \psi^s u])/ds = 0$ であることが微分を実行することにより分かる。([Oh05] なども参照。) □

次に、フレアー鎖複体を定義する。J を ω と両立した概複素構造とし、それを固定する。このとき、$\mathrm{CF}^*(H, J;\alpha)$ を作用汎関数 $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ の臨界点から生成される形式和

$$\sum_{\tilde{\gamma}\in\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})} a_{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma}, \quad a_{\tilde{\gamma}} \in \mathbb{Z}_2,$$

で、任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\#\{\tilde{\gamma} \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha}) \,|\, a_{\tilde{\gamma}} \neq 0, \mathcal{A}_{H,\alpha}(\tilde{\gamma}) \geq \lambda\} < +\infty$$

を満たすもの全体とする。

いま、Novikov 環 $\Lambda_{\omega,\alpha}$ を形式和

$$\sum_{A\in\Gamma_{\omega,\alpha}} c_A A, \quad c_A \in \mathbb{Z}_2$$

で、任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\#\{A \in \Gamma_{\omega,\alpha} \mid c_A \neq 0, \omega(A) \leq \lambda\} < +\infty$$

を満たすもの全体を指す。$\Lambda_{\omega,\alpha}$ には積

$$\left(\sum_{A\in\Gamma_{\omega,\alpha}} c_A A\right) \cdot \left(\sum_{B\in\Gamma_{\omega,\alpha}} d_B B\right) = \sum_{A,B\in\Gamma_{\omega,\alpha}} c_A d_B AB = \sum_A \left(\sum_B c_{A-B} d_B\right) A$$

が定義され、環となる。また、Novikov 環 $\Lambda_{\omega,\alpha}$ は $\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ に

$$\left(\sum_{A\in\Gamma_{\omega,\alpha}} c_A A\right) \cdot \left(\sum_{\tilde{\gamma}} a_{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}\right) = \sum_{\tilde{\gamma}} \left(\sum_A a_{A^{-1}\tilde{\gamma}} c_A\right) \tilde{\gamma}$$

の仕方で作用するとする。したがって、$\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ は Novikov 環上の加群であり、さらに $\mathrm{Per}(H;\alpha)$ により生成される自由加群とみなせる：

$$\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha) \cong \bigoplus_{\gamma\in\mathrm{Per}(H;\alpha)} \Lambda_{\omega,\alpha}\gamma.$$

集合 $\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ に次数を定義するには、Conley-Zehnder 指数 $\mu : \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha}) \to \mathbb{Z}$ を用いる。この Conley-Zehnder 指数は Maslov 指数と関わりが深い。その定義はここでは述べないが、Conley-Zehnder 指数 μ は

$$\mu(A\cdot\tilde{\gamma}) = \mu(\tilde{\gamma}) + 2c_1(A), \quad \tilde{\gamma} \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha}),\ A \in \Gamma_{\omega,\alpha},$$

をみたす。Conley-Zehnder 指数の定義は [SZ92, Sa99] などを参照せよ。

この Conley-Zehnder 指数を用いて、$\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ には次数が次のように定義される。

$$\mathrm{CF}^k(H,J;\alpha) = \left\{ \sum_{\tilde{\gamma}\in\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})} a_{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma} \in \mathrm{CF}^*(H,J;\alpha) \;\middle|\; a_{\tilde{\gamma}} \neq 0 \Rightarrow \mu(\tilde{\gamma}) \equiv k \mod 2N \right\}.$$

ここで、$N \in \mathbb{N}$ は $\mathrm{Im}(c_1 : \Gamma_{\omega,\alpha} \to \mathbb{Z};\ A \mapsto c_1(A))$ の生成元である。もし $\mathrm{Im}c_1 = \{0\}$ であるならば、$N = +\infty$ であると約束する。

$\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ 上に余境界作用素 $\delta^* : \mathrm{CF}^*(H,J;\alpha) \to \mathrm{CF}^*(H,J,;\alpha)$ を定義しよう。$\tilde{x} \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\mu})$ に対して、

$$\delta\tilde{x} = \sum_{\tilde{y}\in\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha}),\mu(\tilde{y})=\mu(\tilde{x})+1} n(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{y} \mod 2 \tag{2.1}$$

とおく。ここで、$n(\tilde{x},\tilde{y})$ は作用汎関数 $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ の臨界点 $\tilde{x}$ から $\tilde{y}$ への向かう"勾配場" $\mathrm{grad}\mathcal{A}_{H,\alpha}$ の"積分曲線"の個数を表わす。

$n(\tilde{x},\tilde{y})$ の定義をもう少し詳しく述べよう。ループ空間(の連結成分)$\mathcal{L}_\alpha M$ には形式的なリーマン計量

$$\langle X,Y\rangle_\gamma=\int_0^1 g_J(X(t),Y(t))dt,\quad X,Y\in T_\gamma\mathcal{L}_\alpha M\cong\Gamma(\gamma^*TM),$$

が定義される。$\mathcal{L}_\alpha M$ 上のこの計量により、被覆空間である $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ に自然に計量が誘導される。したがって、$\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ 上の作用汎関数に対して、$d\mathcal{A}_{H,\alpha}=\langle\mathrm{grad}\mathcal{A}_{H,\alpha},\bullet\rangle$ により、その形式的な勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}\mathcal{A}_{H,\alpha}$ が定義できる。作用汎関数 $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ に対する第一変分公式、および、リーマン計量 g_J の定義 $g_J=\omega(\bullet,J\bullet)$ より、

$$(\mathrm{grad}\mathcal{A}_{H,\alpha})_{[\gamma,u]}=J\Big(\dot{\gamma}-X_t(\gamma)\Big)\in\Gamma(\gamma^*TM),\quad [\gamma,u]\in\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M,$$

と計算できる。

$\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ 上の形式的な勾配方程式

$$\frac{d\gamma}{ds}=-\mathrm{grad}\mathcal{A}_{H,\alpha}$$

を考える。この方程式の解は $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha M$ 上の道を与えるが、その解は同時に $\mathbb{R}\times S^1$ から M への写像 v と見なす事ができる。上の勾配方程式を $v:\mathbb{R}\times S^1\to M$ に対する方程式として読み替えると、

$$\frac{\partial v}{\partial s}+J(v)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-X_t(v)\right)=0 \tag{2.2}$$

となる。ここで、s,t はそれぞれ $\mathbb{R}\times S^1$ の第1，2成分の座標を表わす。方程式 (2.2) を摂動されたコーシー・リーマン方程式、または、フレアー方程式と呼ぶ。

$\tilde{\gamma}_\pm=[\gamma_\pm,u_\pm]\in\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})$ に対して、$\tilde{\gamma}_-$ から $\tilde{\gamma}_+$ へ向かう勾配場 $\mathrm{grad}\mathcal{A}_{H,\alpha}$ の積分曲線のモジュライを考える。正確には、摂動コーシー・リーマン方程式の解のモジュライを考えることになる。

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{\gamma}_-,\tilde{\gamma}_+)=\left\{v:\mathbb{R}\times S^1\to M\;\middle|\;\begin{array}{c}v\text{ は (2.2) をみたす}\\ \lim_{s\to\pm\infty}v(s,t)=\gamma_\pm(t)\\ [x_+,u_+]=[x_+,u_-\#v]\end{array}\right\}$$

とおく。ここで、$u_-\#v$ は u_- と v を γ_- で張り合わせた写像を表わす。さらに、$\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{\gamma}_-,\tilde{\gamma}_+)$ には $\mathbb{R}$ が

$$(s_0\cdot v)(s,t)=v(s+s_0,t),\quad v\in\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{\gamma}_-,\tilde{\gamma}_+),\ s_0\in\mathbb{R},$$

と作用する。この $\mathbb{R}$ の作用による商集合を

$$\mathcal{M}(\tilde{\gamma}_-,\tilde{\gamma}_+)=\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{\gamma}_-,\tilde{\gamma}_+)/\mathbb{R}$$

と書く。

Definition 2.5. $\tilde{x},\tilde{y}\in\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})$ に対して、$n(\tilde{x},\tilde{y})=\#\mathcal{M}(\tilde{x},\tilde{y})$ と定義する。

generic な H, J に対して、モジュライ空間 $\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ は滑らかな多様体の構造を持ち、その次元は $\mu(\tilde{y}) - \mu(\tilde{x}) - 1$ で与えられる。特に $\mu(\tilde{y}) = \mu(\tilde{x}) + 1$ ならば、$\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ は離散集合である。$\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ が多様体であることを証明するには、陰関数定理を用いるので適当な関数空間の完備化をとって議論する必要があるが、ここでは省略する。

$n(\tilde{x}, \tilde{y})$ を使って余境界作用素 δ^* を定義したが、次のような問題が考えられる。1つは、δ^* が well-defined であるかどうか、つまり、$n(\tilde{x}, \tilde{y}) < +\infty$ であるかどうか。もう一つは、$\delta^* \circ \delta^* = 0$ が成り立つかどうかである。これらの問題ははモジュライ空間 $\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ のコンパクト性に関わり、摂動コーシー・リーマン方程式を解析する必要がある。実は、モジュライ空間 $\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ は一般にはコンパクトではない。これはバブル (bubbling off) と呼ばれる現象が起こることを排除できないためであるが、次のような仮定を課すことでバブルが起こらないことが証明できる。

Definition 2.6 (Semi-Positivity). (M, ω) が半正 *(semi-positive)*、または弱単調 *(weakly monotone)* であるとは、

$$\omega(A) > 0 \quad and \quad 6 - 2n \leq c_1(A) < 0$$

となる $A \in \pi_2(M)$ が存在しないことを指す。ただし、$2n = \dim M$ である。

$H^0, H^1 \in \mathcal{H}_\phi$ が $\int_M H_0\omega^n = \int_M H_1\omega^n = 0$ を満たし、かつ、上の同値関係の意味で $H^0 \sim H^1$ であるとする。このとき、

Theorem 2.7. (M, ω) は半正であるとし、H, J は *generic* に選ぶとする。もし $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})$ が $\mu(\tilde{y}) = \mu(\tilde{x}) + 1$ を満たせば、$\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ は有限集合である。

これより、余境界作用素 δ^* が well-defined であることが分かる。ここで、H, J が generic であるとはある generic な条件を満たすことを指す。その条件をすべて述べることは出来ないが、その中には「ハミルトン系 $\dot{x} = X_t$ の周期軌道はすべて非退化 (non-degenerate) である。」という条件も含まれる。もし周期軌道がすべて非退化であれば、M は閉多様体であると仮定していたから、周期軌道は有限個しかないことに注意する。以降特に断らない限り、ハミルトン系 $\dot{x} = X_t$ の周期軌道はすべて非退化と仮定する。

また次の定理より、$\delta^* \circ \delta^* = 0$ であることが証明される。

Theorem 2.8. (M, ω) は半正であるとし、H, J は *generic* に選ぶとする。このとき、$\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{z})$ のコンパクト化 $\mathcal{CM}(\tilde{x}, \tilde{z})$ で、$\mu(\tilde{z}) = \mu(\tilde{x}) + 2$ なる $\tilde{x}, \tilde{z}$ に対して、

$$\partial\Big(\mathcal{CM}(\tilde{x}, \tilde{z})\Big) = \bigcup_{\mu(\tilde{y}) = \mu(\tilde{x})+1} \mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y}) \times \mathcal{M}(\tilde{y}, \tilde{z})$$

を満たすものが存在する。

Definition 2.9. $(\mathrm{CF}^*(H, J; \alpha), \delta^*)$ を可縮でない周期軌道に対するフレアー鎖複体と呼ぶ。また、$(\mathrm{CF}^*(H, J; \alpha), \delta^*)$ のホモロジーを $\mathrm{HF}^*(H, J; \alpha)$ と書き、可縮でない周期軌道に対するフレアーコホモロジーという。

1節で述べたように、フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*(H, J; \alpha)$ は H, J の選び方に依らず、すべて同型であることが示せる。しかしこれも1節で述べたように、自明でない α に対しては、$\mathrm{HF}^*(H, J; \alpha) = 0$ となる。ここで述べた定理等の証明の詳細は原論文 [Fl89-2] や Salamon による lecture note[Sa99] を参照。

3 Filtered フレアーコホモロジー

この節では、Filtered フレアーコホモロジーについて述べる。

まず、その定義から述べよう。以下、ハミルトン関数 H、および、概複素構造 J は generic であるとする。前節で定義したフレアー鎖複体 $\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ には次のような自然な filtration が入る：

$$\mathrm{CF}^*_a(H,J;\alpha)=\left\{\sum a_{\tilde\gamma}\tilde\gamma\in\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)\;\middle|\;\mathcal{A}_{H,\alpha}(\tilde\gamma)\le a\right\}. \tag{3.1}$$

ここで、$a\in\mathbb{R}$ である。

いま、実数 a はスペクトル集合 $\mathrm{Spec}(H;\alpha)$ に含まれないとする；$a\notin\mathrm{Spec}(H;\alpha)$. すると、余境界作用素 (2.1) は $\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ の filtration(3.1) を保つ。すなわち、

$$\delta^k(\mathrm{CF}^k_a(H,J;\alpha))\subset\mathrm{CF}^{k+1}_a(H,J;\alpha)$$

である。実際、$\tilde\gamma_\pm\in\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})$, $\mu(\tilde\gamma_+)=\mu(\tilde\gamma_-)+1$, に対して、エネルギー恒等式 (energy identity)

$$\mathcal{A}_{H,\alpha}(\tilde\gamma_-)-\mathcal{A}_{H,\alpha}(\tilde\gamma_+)=\int_{\mathbb{R}\times S^1}\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dsdt,\quad u\in\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde\gamma_-,\tilde\gamma_+),$$

が成立するから、$\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde\gamma_-,\tilde\gamma_+)\neq\emptyset$ ならば $\mathcal{A}_{H,\alpha}(\tilde\gamma_+)\le\mathcal{A}_{H,\alpha}(\tilde\gamma_-)$ となる。よって、余境界作用素 (2.1) の定義より、$\delta^k(\mathrm{CF}^k_a(H,J;\alpha))\subset\mathrm{CF}^{k+1}_a(H,J;\alpha)$ が示せた。

したがって、$\mathrm{CF}^*_a(H,J;\alpha)$ に対してもホモロジー

$$\mathrm{HF}^k_a=\frac{\ker(\delta^k:\mathrm{CF}^k_a\to\mathrm{CF}^{k+1}_a)}{\mathrm{Im}(\delta^{k-1}:\mathrm{CF}^{k-1}_a\to\mathrm{CF}^k_a)}$$

が定義でき、これを filtered フレアーコホモロジーと呼ぶ。ここで、$\mathrm{CF}^*_a=\mathrm{CF}^*_a(H,J;\alpha)$ と略記した。以下、文脈上 H、および、J が明らかなときは、$\mathrm{CF}^*_a=\mathrm{CF}^*_a(H,J;\alpha)$ と略すると約束する。

さらに、$a,b\in\mathbb{R}$ は $a<b$ であって、スペクトル集合に含まれていないとする；$a,b\notin\mathrm{Spec}(H;\alpha)$. $\delta^k(\mathrm{CF}^k_a)\subset\mathrm{CF}^{k+1}_a$, $\delta^k(\mathrm{CF}^k_b)\subset\mathrm{CF}^{k+1}_b$, であるから、余境界作用素 (2.1) から

$$\mathrm{CF}^*_{(a,b)}(H,J;\alpha)=\frac{\mathrm{CF}^*_b(H,J;\alpha)}{\mathrm{CF}^*_a(H,J;\alpha)}$$

上に余境界作用素が誘導される。$\mathrm{CF}^*_{(a,b)}$ 上に誘導される余境界作用素も同様の記号 δ^* で記すことにする。このようにして定まる鎖複体 $(\mathrm{CF}^*_{(a,b)},\delta^*)$ のホモロジー

$$\mathrm{HF}^k_{(a,b)}(H,J;\alpha)=\frac{\ker(\delta^k:\mathrm{CF}^k_{(a,b)}\to\mathrm{CF}^{k+1}_{(a,b)})}{\mathrm{Im}(\delta^k:\mathrm{CF}^{k-1}_{(a,b)}\to\mathrm{CF}^k_{(a,b)})}$$

も filtered フレアーコホモロジーという。ここで、filtered フレアー鎖複体 $\mathrm{CF}^*_{(a,b)}(H,J;\alpha)$ や filtered フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H,J;\alpha)$ はもはや $\Lambda_{\omega,\alpha}$-加群ではないことに注意する。ここでは、$\mathrm{CF}^*_{(a,b)}(H,J;\alpha)$ や $\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H,J;\alpha)$ は $\mathbb{Z}_2$-加群であると見なす。

さて、filtered フレアーコホモロジーの特徴を以下に述べよう。

(0) filtered フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J; \alpha)$ は M 上の概複素構造 J に依存しない。つまり、M 上の概複素構造 J_0, J_1 に対して、

$$\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J_0; \alpha) \cong \mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J_1; \alpha)$$

である。よって、$\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H; \alpha) = \mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J; \alpha)$ とも書いてよい。

(1) unfiltered フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*(H, J; \alpha)$ が自明であるからといって、filtered フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J; \alpha)$ が自明であるとは限らない。

(2) filtered フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J; \alpha)$ は a, b の選び方にも依存する。つまり、a, b の選び方により、$\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J; \alpha)$ が自明であったり、そうではなくなったりする。

(3) filtered フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J; \alpha)$ はハミルトン関数 $H \in C^\infty(S^1 \times M)$ に依存するのではなく、(本質的には)$[\phi, H] \in \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$ に依存する。

(4) ハミルトン関数 $H \in C^\infty(S^1 \times M)$ を「少し摂動」しても、filtered フレアーコホモロジー $\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H, J; \alpha)$ は不変である。

特徴 (1) は、filtered フレアーコホモロジーが可縮でないハミルトン系の周期軌道の存在を調べる道具として使える、という一つの根拠である。実際この論説での設定と違うが、M がリーマン多様体 Q の余接バンドル T^*Q である場合について、Biran-Polterovich-Salamon[BPS03]、または、Weber[We06] は filtered フレアーホモロジーを可縮でない周期軌道の存在問題に応用している。しかし、彼らの証明はシンプレクティック多様体 (M, ω) が余接バンドル T^*Q であるという仮定を存分に使っているため、我々の設定に用いることは出来ない。

また、filtered フレアーコホモロジーが使いにくい点は (2) である。つまり、可縮でない周期軌道の存在を知るには、自明でない filtered フレアーコホモロジーを得るために a, b をうまく選ばなくてはならない。さらに、a, b の選び方はハミルトン関数 H に依存して決まる。ただし、特徴 (3) があるので、ハミルトン関数 H を「少し摂動」しても、a, b の選び方はその摂動では変わらない。特徴 (3) を正確な定理として述べておく：

Assumption 3.1 (Rationality). 写像

$$\Gamma_{\omega,\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ A \longmapsto \omega(A)$$

による像は離散的である。

したがって、上の仮定を満たし、かつ、ハミルトン系 $\dot{x} = X_t$ の周期軌道がすべて非退化であれば、スペクトル集合 $\mathrm{Spec}(H; \alpha)$ は離散的である。

このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 3.2 (cf. [Oh02]). $H^0, H^1 \in \mathcal{H}_\phi$ が $\int_M H_0\omega^n = \int_M H_1\omega^n = 0$ を満たし、かつ、命題 *2.3* の意味で $H^0 \sim H^1$ であるとする。

このとき、仮定 *3.1* のもとで、

$$\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H^0, J; \alpha) \cong \mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H^1, J; \alpha)$$

である。ここで、$a, b \notin \mathrm{Spec}(H^0; \alpha) = \mathrm{Spec}(H^1; \alpha)$.

定理2.4より、定理3.2の仮定のもとでは $\mathrm{Spec}(H^0;\alpha)=\mathrm{Spec}(H^1;\alpha)$ であることに注意する。

特徴(0)とあわせると、filteredフレアーコホモロジーは

$$\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(\tilde{\phi};\alpha)=\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H,J;\alpha),\quad \tilde{\phi}=[\phi,H]\in\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega),$$

とも書いてよいであろう。

最後に、特徴(4)の正確な主張を述べておこう。

Theorem 3.3 (Floer-Hofer[FH94]). $H^0,H^1\in C^\infty(S^1\times M)$ に対して、$a,b\notin\mathrm{Spec}(H^0;\alpha)\cup\mathrm{Spec}(H^1;\alpha)$ であるとする。さらに、

$$\varepsilon=\inf\{|\lambda-a|,|\lambda-b|\mid\lambda\in\mathrm{Spec}(H^0;\alpha)\cup\mathrm{Spec}(H^1;\alpha)\}$$

とおく。もし $\|H^0-H^1\|_{C^0(S^1\times M)}<\varepsilon/3$ であるならば、

$$\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H^0,J;\alpha)\cong\mathrm{HF}^*_{(a,b)}(H^1,J;\alpha)$$

である。

この定理の証明は本質的にはFloer-Hofer[FH94]による。

4 Whitehead トーション

この節では、フレアーコホモロジーから定まるWhiteheadトーションを定義し、その基本的な性質を証明する。Whiteheadトーションを考える理由は次の通りである。1節でも述べたように、$\mathrm{HF}^*(H,J;\alpha)=0,\alpha\neq0$ であり、フレアーコホモロジーからは可縮でない周期軌道の存在についての情報は得られなかった。しかし、可縮でない周期軌道の存在を示すもっと直接的な方法はフレアー鎖複体 $\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ が消えているかどうかを調べればよい。そこで、余境界作用素 δ^* が消えているかどうかを調べるのである。Whiteheadトーションとは余境界作用素の行列式のようなものであり、その性質を調べることには意義があるであろう。

まずそのために、Whitehead群の定義を復習しておく。詳しくは、Milnor[Mi66]を参照。$\Lambda_{\omega,\alpha}$ を2節で定義したNovikov環であるとする。つまり、

$$\Lambda_{\omega,\alpha}\left\{\sum_{A\in\Gamma_{\omega,\alpha}}c_AA:\text{形式和}\;\middle|\;\#\{A\mid c_A\neq0,\omega(A)\le\lambda\}<\infty,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

であった。

Novikov環 $\Lambda_{\omega,\alpha}$ を成分として持つ可逆な $n\times n$ 行列全体を $\mathrm{GL}(n,\Lambda_{\omega,\alpha})$ と書く。また、$\mathrm{GL}(\Lambda_{\omega,\alpha})$ で $\mathrm{GL}(n,\Lambda_{\omega,\alpha})$ の帰納極限を表わすとする：$\mathrm{GL}(\Lambda_{\omega,\alpha})=\lim_{n\to\infty}\mathrm{GL}(n,\Lambda_{\omega,\alpha})$.

$\mathrm{GL}(\Lambda_{\omega,\alpha})$ を交換子群で割り、アーベル化したものを $K_1(\Lambda_{\omega,\alpha})$ とする。すなわち、

$$K_1(\Lambda_{\omega,\alpha})=\frac{\mathrm{GL}(\Lambda_{\omega,\alpha})}{[\mathrm{GL}(\Lambda_{\omega,\alpha}),\mathrm{GL}(\Lambda_{\omega,\alpha})]}$$

である。$K_1(\Lambda_{\omega,\alpha})$ を $\Lambda_{\omega,\alpha}$ 上の K_1 群という。さらに、

$$\bar{K}_1(\Lambda_{\omega,\alpha}) = \frac{K_1(\Lambda_{\omega,\alpha})}{\{\pm 1\}}$$

とおく。この $\bar{K}_1(\Lambda_{\omega,\alpha})$ を reduced K_1 群という。

Definition 4.1 (Whitehead group). $\Gamma_{\omega,\alpha} = \mathrm{GL}(1, \Lambda_{\omega,\alpha})$ と同一視する。このとき、

$$\mathrm{Wh}(\Lambda_{\omega,\alpha}) = \frac{\bar{K}_1(\Lambda_{\omega,\alpha})}{\Gamma_{\omega,\alpha}} = \frac{K_1(\Lambda_{\omega,\alpha})}{\{\pm\Gamma_{\omega,\alpha}\}}$$

とおき、$\Lambda_{\omega,\alpha}$ に対する *Whitehead* 群という。

さて、フレアー鎖複体 $(\mathrm{CF}^*(H, J; \alpha), \delta^*)$ は非輪状 (acyclic)、つまり、$\mathrm{HF}^*(H, J; \alpha) = 0$ であった。Whitehead トーションとはこのような非輪状な鎖複体に対して定義される、Whitehead 群に値をもつ量である。

ハミルトン系 $\dot{x} = X_t$ の周期軌道はすべて非退化と仮定していたから、周期軌道の数は有限である。いま、$\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i$ を $\Lambda_{\omega,\alpha}$-加群 CF^k の基底とする。さらに、$\ker(\delta^k : \mathrm{CF}^k \to \mathrm{CF}^{k+1})$ は $\Lambda_{\omega,\alpha}$-自由加群となることが知られているので、その基底を $\{\tilde{x}_j^k\}_j$ とする。

$\mathrm{CF}^*(H, J; \alpha)$ は非輪状であったから、$\ker \delta^k = \mathrm{Im}\delta^{k-1}$ である。よって、完全系列

$$0 \longrightarrow \ker \delta^k \longrightarrow \mathrm{CF}^k \longrightarrow \mathrm{Im}\delta^k = \ker \delta^{k+1} \longrightarrow 0$$

と $\ker \delta^k, \ker \delta^{k+1}$ の基底 $\{\tilde{\gamma}_j^k\}_j, \{\tilde{\gamma}_j^{k+1}\}_j$ より、CF^k にもう一つの基底 $\{\tilde{y}_i^k\}_i$ が自然に誘導される。したがって、我々は $\Lambda_{\omega,\alpha}$-加群 CF^k 上に２つの基底 $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i$ と $\{\tilde{y}_i^k\}_i$ を得たわけである。いま、その２つの基底の間の基底変換行列を $A^k = (ak_{il})$ とする；$\tilde{y}_i^k = \sum_l a_{il}^k \tilde{\gamma}_l$. ここで、基底変換行列 A^k は Novikov 環 $\Lambda_{\omega,\alpha}$ に値を持つことに注意しよう。

Definition 4.2. $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i$ を $\Lambda_{\omega,\alpha}$-加群 $(\mathrm{CF}^*(H, J; \alpha), \delta^*)$ の基底とする。フレアー鎖複体 $(\mathrm{CF}^*(H, J; \alpha), \delta^*)$ に対する *Whitehead* トーションは、

$$\tau = \tau(\mathrm{CF}^*(H, J; \alpha), \delta, \{\tilde{\gamma}_i^k\}_{i,k}) = \sum_k (-1)^k [A^k] \in \mathrm{Wh}(\Lambda_{\omega,\alpha})$$

と定義される。

Whitehead トーションは $\ker \delta^k$ の基底 $\{\tilde{x}_j^k\}_j$ の取り方には依存しないはよく知られている。一方、Whitehead トーションは CF^k の基底 $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i$ の取り方には依存する。しかし、CF^k の基底 $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i$ を次のように自然に選ぶことができる：CF^* は $\mathrm{Per}(H; \alpha)$ の元によって生成される $\Lambda_{\omega,\alpha}$-自由加群と同型であったから、CF^k の基底 $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i$ としてその同型に対応する $\mathcal{A}_{H,\alpha}$ の臨界点を選べばよい。さらに、$\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i \subset \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})$ は

$$|\mu(\tilde{\gamma}_i^k) - \mu(\tilde{\gamma}_j^k)| < 2N, \quad \text{for all } i, j,$$

満たすように選ぶ。ここで、$N \in \mathbb{N}$ は $\mathrm{Im}(\Gamma_{\omega,\alpha} \to \mathbb{Z}; A \mapsto c_1(A))$ の生成元である。このような CF^k の基底 $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i \subset \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H,\alpha})$ は canonical であるという。

また、$\{\tilde{\gamma}_i^k\}_i$ は一意に決まらないが、Whitehead トーション $\tau=\tau(\mathrm{CF}^*,\delta,\{\tilde{\gamma}_i^k\}_{i,k})$ は $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_{i,k}$ に依らず定まる。以下、CF^k の基底として $\{\tilde{\gamma}_i^k\}_{i,k}$ を上のように選ぶと約束し、$\tau=\tau(\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha))$ と略記することにする。

Whitehead トーションの定義から分かるように、$\tau(\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha))$ は $\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha)$ が非輪状であるから定まる量である。つまり、可縮でない周期軌道をフレアー鎖複体を使って調べる道具として適しているであろう。もし $\tau(\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha))$ が 0 でなければ、ホモトピー型が $\alpha\in\pi_1(M)$ であるような周期軌道が存在することになるからである。

さて、フレアー鎖複体に対する Whitehead トーションに対して次の定理が成立する：

Theorem 4.3. $H^0,H^1\in\mathcal{H}_\phi$ は命題 *2.3* の意味で同値であるとする。このとき、

$$\tau(\mathrm{CF}^*(H^0,J;\alpha))=\tau(\mathrm{CF}^*(H^1,J;\alpha))$$

である。

さらに、$\tau(\mathrm{CF}^*(H,J;\alpha))$ は概複素構造 J に依らず定まる。J に依存しないことの証明は、フレアーコホモロジーや filtered フレアーコホモロジーが概複素構造に依存しないことの証明と同様である。特に、$(\mathrm{CF}^*(H,J_0;\alpha),\delta_0)\cong(\mathrm{CF}^*(H,J_1;\alpha),\delta_1)$ であることが証明できる。

Skecth of Proof. 命題 2.3 の意味で H^0,H^1 は同値であるから、H^0 と H^1 とを結ぶ 1 パラメータ族 $\{H^s\}_{s\in[0,1]}\subset\mathcal{H}_\phi$ が存在する。このとき、定理 2.4 の証明でも述べたように、$\mathrm{Per}(H^s;\alpha)\cong\mathrm{Per}(H^0;\alpha),\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^s,\alpha})\cong\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H^0,\alpha})$ である。したがって、$\mathrm{CF}^*(H^s,J;\alpha)$ は $\Lambda_{\omega,\alpha}$-自由加群として $s\in[0,1]$ に依らずすべて同型である。しかし、余境界作用素 $\delta_s^*:\mathrm{CF}^*(H^s,J;\alpha)\to\mathrm{CF}^*(H^s,J;\alpha)$ は変化する可能性がある。

式 (2.1) より、余境界作用素は摂動コーシー・リーマン方程式 (2.2) の解を数えることで定義された。よって、余境界作用素が変化するとすれば摂動コーシー・リーマン方程式 (2.2) の解のモジュライ空間が変化するときである。そのような変化は generic には有限個のパラメータの点 $s_1,s_1,\cdots,s_m\in[0,1]$ を跨ぐ度に起こる。摂動コーシー・リーマン方程式 (2.2) の解のモジュライ空間の変化は、Floer[Fl88-3] および Sullivan[Su02] と同様の議論により記述できる。ここではモジュライ空間の変化を述べるにはかなり準備が必要なので述べないが、フレアー鎖複体の変化は以下のようになる。

十分小さい $\varepsilon>0$ に対して、同型写像

$$T_k:(\mathrm{CF}^k(H^{s_0-\varepsilon},J;\alpha),\delta^k_{s_0-\varepsilon})\longrightarrow(\mathrm{CF}^k(H^{s_0+\varepsilon},J;\alpha),\delta^k_{s_0+\varepsilon})$$

が存在して、$T_k\circ\delta^k_{s_0-\varepsilon}=\delta^k_{s_0+\varepsilon}\circ T_k$ を満たし、$\mathrm{CF}^k(H^{s_0-\varepsilon},J;\alpha)$ と $\mathrm{CF}^k(H^{s_0+\varepsilon},J;\alpha)$ の canonical な基底で、T_k の行列表示が elementray となる。この場合 T_k の表現行列がが elementray であるとは、T_k の表現行列が対角成分がすべて 1 であり、off diagonal に唯一つ非零な成分を持ち、その非零成分は $\Gamma_{\omega,\alpha}$ の元となっていることを指す。このとき、Whitehead トーションは不変であることが示される：

$$\tau(\mathrm{CF}^*(H^{s_0-\varepsilon},J;\alpha))=\tau(\mathrm{CF}^*(H^{s_0+\varepsilon},J;\alpha)).$$

□

References

[Ar65] V. I. Arnold, Sur une propriété toplogique des applications globalement canoniques de la mécanique clasique, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **261**, 3719-3722 (1965).

[BPS03] P. Biran, L. Polterovich and D. Salamon, Propagation in Hamiltonian dynamics and relative symplectic homology, Duke Math. J. **119**, 65-118 (2003).

[CFH95] K. Cieliebak, A. Floer and H. Hofer, Symplectic homology II. a general construction, Math. Z. **218**, 103 - 122 (1995).

[CZ83] C. Conley and E. Zehnder, The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold, Invent. Math. **73**, 33-49 (1983).

[El79] Y. Eliashberg, Estimates on the number of fixed points of area preserving transformations, Syktyvkar University, Preprint, 1979.

[Fl88-1] A. Floer, The unregularized gradient flow of the symplectic action, Comm. Pure and Appl. Math. **41**, 775 - 813 (1988).

[Fl88-2] A. Floer, A relative Morse index for the symplectic action, Comm. Pure and Appl. Math. **41**, 393 - 407 (1988).

[Fl88-3] A. Floer, Morse theory for Lagrangian intersections, J. Diff. Geom. **28**, 513-547 (1988).

[Fl89-1] A. Floer, Cuplength estimates on Lagrangian intersections, Comm. Pure and Appl. Math. **42**, 335 - 356 (1989).

[Fl89-2] A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, Commun. Math. Phys. **120**, 575 - 611 (1989).

[Fl89-3] A. Floer, Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, J. Diff. Geom. **30**, 207 - 221 (1989).

[FH93] A. Floer and H. Hofer, Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry, Math. Z. **212**, 13 - 38 (1993).

[FH94] A. Floer and H. Hofer, Symplectic homology I. open sets in $\mathbb{C}^n$, Math. Z. **215**, 37-88 (1994).

[FHS95] A. Floer, H. Hofer and D. Salamon, Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action, Duke Math. J. **80**, No. 1, 251 - 292 (1995).

[FO99] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, Topology **38**, 933-1048 (1999).

[Fu99] 深谷賢治, 「シンプレクティック幾何学」, 岩波書店, 1999.

[Gr85] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. **82**, 307 - 347 (1985).

[HS95] H. Hofer and D. A. Salamon, Floer homology and Novikov ring, in *The Floer memorial volume*, Progress in Mathematics **133**, Birkhäuser Verlag, 1995.

[MS04] D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology*, Colloquium Publications, AMS, 2004.

[LT98] G. Liu and G. Tian, Floer homology and Arnold conjecture, J. Diff. Geom. **49**, 1-74 (1998).

[MD90] D. McDuff, Elliptic methods in symplectic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **23**, No. 2, 311-358 (1990).

[Mi66] J. Milnor, Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 358-426 (1966).

[Oh02] Y.-G. Oh, Chain level Floer theory and Hofer's geometry of the Hamiltonian diffeomorphism group, Asian J. Math. **6**, 579-624 (2002).

[Oh04] Y.-G. Oh, Floer mini-max theory, the Cerf diagram, and the spectral invariants, arXiv:math/0406449v2.

[Oh05] Y.-G. Oh, Normalization of the Hamiltonian and the action spectrum, J. Korean Math. Soc. **42**, No. 1, 65-83 (2005).

[On95] K. Ono, On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds, Invent. Math. **119**, 519-537 (1995).

[Po01] L. Polterovich, *The geometry of the group of symplectic diffeomorphism*, Birkhäuser Verlag, 2001.

[Sa90] D. Salamon, Morse theory, the Conley index and Floer homology, Bull. London Math. Soc. **22**, 113 - 140 (1990).

[Sa99] D. Salomon, Lectures on Floer homology, in *Symplectic geometry and topology*, Y. Eliashberg and L. Traynor (eds.), AMP Providence, 1999.

[SZ92] D. Salamon and E. Zehnder, Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index, Comm. Pure and Appl. Math. **45**, 1303 - 1360 (1992).

[Su02] M.G. Sullivan, K-theoretic invariants for Floer homology, GAFA **12**, 810-872 (2002).

[We06] J. Weber, Noncontractible periodic orbits in cotangent bundles and Floer theory, Duke Math. J. **133**, No. 3, 527-568 (2006).